

數學哲學現代發展概述

徐利治

鄭毓信

要談論數學哲學的現代發展，首先需要簡略回顧一下前一個時代的終結，所以本文將包含兩個部份，但重點是第二部分。

一. 一個時代的終結

所謂數學哲學的現代發展，是相對於以數學基礎研究為中心的時代而言的。從1890到1940年的五十年，可以說是數學哲學研究的一個黃金時代。弗雷格 (G. Frege)、羅素 (B. Russell)、布勞維爾 (L.E.J. Brouwer) 和希爾伯特 (D. Hilbert) 等人曾圍繞數學基礎問題進行了系統和深入的研究，並發展起了邏輯主義、直覺主義和形式主義等具有廣泛和深遠影響的數學哲學觀，從而為數學哲學的研究開拓出了一個嶄新的時代 (參見 [1] 或 [2])。

正因為這是一個以基礎研究為中心的時代，在數學哲學領域中就曾出現過這樣一些特殊現象：有不少數學哲學的著作就是以數學基礎為名的。如弗雷格的《算術基礎》，維特根斯坦 (L. Wittgenstein) 的《關於數學基礎的評論》，懷爾德 (R. Wilder) 的

《數學基礎導論》，弗蘭克爾 (A. Fraenkel) 和巴-希勒爾 (Y. Bar-Hillel) 的《集合論基礎》等等。另外，如果隨意地打開一本數學哲學的著作，只要它是在這一時代或是在稍後的年代出版的，也一定可以發現有關基礎問題或邏輯主義等學派的述評在其中占有主要地位。然而，這一時代現在已經過去了。作為這一時代終結的重要標誌就是關於基礎研究在總體上的反思。例如，這種反思即成為下述的一系列論文的主要論題：拉卡托斯 (I. Lakatos) 的“無窮回歸與數學基礎”，卡爾馬 (L. Kalmar) 的“數學的基礎—今在何方？”普特南 (H. Putnam) 的“沒有基礎的數學”，斯萊尼斯 (E. Sleinis) 的“數學需要基礎嗎？”沙克爾 (S. Shanker) 的“數學基礎的基礎”等等。

人們經由反思產生了哪些結論呢？這可以大致歸結如下：

(1) 認識到數學中並不存在所謂的“基礎危機”。因而，所謂的基礎研究也就不具有任何特別重要的意義，或者說，數學基礎問題不應被看成數學哲學研究的主要內容。

例如，普特南等人就曾對導致“數學基礎危機”這一說法的若干困惑問題進行過具體分析：

首先的一個問題是，集合論悖論的發現是否證明了已有數學的不可靠性？（參見 [1]，第 141 頁。）確實，集合論悖論被發現的最初一段時期，曾使一些數學家感到很大的震驚。但是，正如 [6] 指出的，進一步的研究表明：“數學活動的真正領域，無論是分析或幾何，都沒有直接受到悖論的影響，它們只是出現於那些特別一般的領域，而這遠遠超出了實際使用這些學科的概念的領域。”因此，所謂的“危機感”就只是一個“歷史的現象”，而實際上早已不再存在。與此相反，現今為人們所普遍接受的卻是關於數學的堅強信念。例如，斯坦納 (M. Steiner)、萊曼 (H. Lehman) 與基切爾 (P. Kitcher) 等人都曾不約而同地指出，這是數學哲學研究的一個明顯和無可辯駁的出發點：人們具有一定的數學知識，這些知識是可靠的，也就是已經獲得證實了的真理（見 [12]、[13]、[14]）。

第二個問題是，在如何解決悖論問題上缺乏統一的意見是否意味著數學的研究不再具有統一的基礎？（參見 [6]，第 15 頁。）事實上，如今的普遍看法是：現行的公理化集合理論，如 ZF 系統和 BG 系統，已經為數學的研究提供了一個合適的基礎，因為，這些理論的基本原則是為一般數學家所幾乎一致地接受的，而且，所有已知的悖論在其中都已得到了排除（這就是說，這些悖論不可能按照原來的方法在其中得到構造），再者，在理論系統中至今並沒有發現新的悖論。

第三個問題是，非歐幾何的建立是否意味著“數學真理性的喪失”？（參見 [15]，229-305 頁。）正如普特南指出的，非歐幾何的創立，只是表明了“自明性”並不能被看成相應結論絕對真理性的保證；因而，我們所應拋棄的僅僅是關於數學具有絕對的先天真理性的觀點，而不能因此否定數學的真理性的。實際上，數學作為研究理想化的“量化模式”的科學，數學模式具有的“形式客觀性”即蘊涵了“模式真理性”，而反映各種可能的不同空間結構形式的那些幾何模式（一類量化模式）具有多樣性是很自然的事。（參見 [23]、[24]。）

綜上所述，人們就得出了這樣的結論：“不能認為數學是含糊不清的；也不能認為數學在其基礎中有任何危機”；“我們不必去繼續尋找基礎而徒勞無功；我們也不必因缺乏基礎而迷惑徘徊或感到不合邏輯”。（參見 [9]、[17]。）

當然，在斷言“數學基礎問題已不再是數學哲學研究的中心問題”的同時，我們並不能因此而否定基礎研究的意義。事實上，後者現今在很大程度已經成為一種專門的數學研究；另外，作為先前的數學基礎研究的繼續和發展，相應的哲學思考也具有一定的哲學意義，特別是，由於集合論在現代數學中佔有特別重要的地位，關於集合概念的深入分析就是現代數學哲學研究的一個重要課題。但是，這又只是全部數學哲學的一個部分，而不應被看成數學哲學的中心問題或主流。

(2) 發現已有的觀點不能令人滿意，因此需要尋找新的出路。

例如，魯濱遜 (A. Robinson) 雖把 1890 年至 1940 年的這五十年稱之為“數學

哲學的黃金時代”，但他還是認為所有那些作為數學的哲學基礎而提出來的觀點都具有嚴重的缺陷和困難。(參見 [16], 228-229頁。)另外，普特南則採取了更為直接的批判立場，認為“數學哲學中的各種體系無一例外都是不用認真看待的。”([9], 43-45頁。)

實際情況是，數學哲學的研究會由於邏輯主義等學派的失敗而一度陷入低谷，並被描述成“進入了一個悲觀的、停滯的階段。”([8], 第192頁。)但是，人們現已擺脫了這種悲觀的情緒，並積極從事於新的研究。例如可從以下的一些論著清楚地看出：赫斯(R. Hersh):“復興數學哲學的一些建議”，拉卡托斯：“經驗主義在現代數學哲學中的復興？”托瑪茲克(T. Tymozko):《數學哲學中的新方向》等。

綜上可見，數學哲學的研究已經脫離了數學基礎研究的傳統框架，從而就已告別了舊時代而進入一個新的歷史時期。

二. 數學哲學的現代發展

自六十年代起數學哲學便進入了一個新的發展時期。與基礎研究相比，這一新的發展表現出了一些顯著的不同特點。

(1) 研究立場的轉移，即由嚴重分離轉移到了與實際數學活動的密切結合。

具體地說，在基礎研究中，儘管邏輯主義等學派提出了不同的主張，但他們所實際從事的都是一種規範性的工作。這就是說，他們的共同出發點是對於已有數學可靠性的憂慮或不滿，他們又都提出了關於數學可靠性的某種標準，並力圖按照這樣的標準去對已

有的數學進行改造或重建。這也就正如伯納塞洛夫和普特南所指出的：他們所考慮的主要是“‘合法’的數學應當是什麼樣的？”他們並企圖為實際的數學活動提出明確的規範，即“什麼樣的概念和方法是合法的，從而可以正當地加以使用”。(參見 [1], 第2頁)

正因如此，數學基礎研究在整體上就暴露出了嚴重脫離實際數學活動的弊病。與此相比，人們在現代的數學哲學研究中則已注意到了採取新的基本立場。這就如同赫斯在“復興數學哲學的一些建議”中所指出的：在數學哲學的研究中我們應當採取一種不同的態度，即“不承認任何一種先驗的哲學信條有權告訴數學家應該做什麼，或者宣稱他們正在不由自主地或不知所謂地正在做什麼”，而應“真實地反映當我們使用、講授、發現或發明數學時所作的事。”這也就是說，數學哲學應當是正在工作的數學家們的“活的哲學”，即研究人員、教師和使用數學者對他們所從事的工作的哲學見解。([16], 第二期, 75-76頁, 第一期, 第52頁。)

研究立場的轉移直接導致了新的數學觀念。例如，正是基於對數學家實際言行及數學史上實例的考察，出現了經驗主義在現代數學哲學中的“復興”(可參見 [8]、[13]、[14]、[18])，而這不僅是對於邏輯主義等學派理性主義立場的一種“反動”，而且也是依據數學的現代發展對傳統的經驗主義數學觀(這是以穆勒 [J. Mill] 為主要代表的)作出的重要改進或修正。其次，除“經驗性”以外，一些數學哲學家還突出強調了數學的“擬經驗性”，即認為除實踐的標準以外，數

學還具有自己相對獨立的檢驗標準——顯然，這即是對於數學特殊性的直接肯定（可參見 [7]、[21]、[22]）。最後，也正是基於數學的現代發展，一些學者提出了“數學是模式的科學”的觀點（可參見 [23]），而這即可看成關於“什麼是數學”的明確回答。

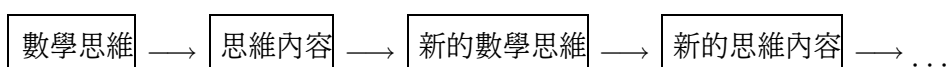
應該提及的是，我們也在上述方向上作出了獨立的研究工作。這首先是關於數學抽象的定性分析。具體地說，我們認為，除抽象的內容、量度以外，數學抽象的特殊性更在於它的特殊方法：在嚴格的數學研究中，無論所涉及的對象是否具有明顯的直觀意義，我們都只能依據相應的定義（顯定義或隱定義）和推理規則去進行演繹，而不能求助於直觀，從而，在這樣的意義上，數學的抽象事實上就是一種“建構”的活動——數學的研究對象即是通過這樣的活動得到構造的。正因為此，數學對象的建構即就意味著與真實的分離。這就是說，在純粹的數學研究中，我們是以抽象思維的產物為直接對象，而不是以其可能的現實原型為直接對象從事研究的；進而，相對於經驗的研究而言，以抽象思維的產物為對象從事研究也就具有更為普遍的意義：它們所反映的已不是某一特定事物或現象的量的特徵，而是一類事物或現象在量的方面的共同特性。

為了清楚地表明數學對象的相對獨立性及其普遍意義，並考慮到數學抽象的特殊內容，可以把數學的研究對象特稱為“量化模式”；從而，對於“什麼是數學”的問題我們就可作出如下的解答：數學即是量化模式的建構和研究。由於這同時表明了數學的研究對

象與方法，因此就可被認為關於數學的一個較為合適的“定義”。另外，這事實上也就為上述關於“數學是模式的科學”的論述提供了必要的補充和說明。

其次，以上述關於數學抽象的定性分析為基礎，我們進一步發展起了一個系統的數學哲學理論——“模式論的數學哲學”，包括模式論的數學本體論、數學真理的層次理論和模式論的數學認識論（可參見 [24]、[25]、[26]、[27]），從而為傳統的數學哲學問題提供了明確的解答。首先，由於數學對象是借助於明確的定義得到建構的，而且在嚴格的數學研究中，我們又只能依靠所說的定義去進行推理，而不能求助於直觀，因此，儘管某些數學概念在最初很可能只是少數人的“發明創造”，但是，一旦這些對象得到了“建構”，它們就立即獲得了確定的“客觀內容”；又由於這種客觀內容不可能借助與真實世界的聯繫得到直接的、簡單的說明，因此，從本體論的角度說，既應肯定數學對象對於思維的依賴性，同時又應承認數學對象構成了與真實世界不相同的另一類獨立存在（對此可特稱為“數學世界”）。這就是說，正是所說的建構活動促成了其由主觀的思維創造向客觀的獨立存在的轉化。其次，所謂“數學真理的層次理論”，其核心內容即是指數學真理具有一定的層次性：第一層次即“現實真理性”——表明數學理論是對於客觀世界量的規律性的正確反映；第二層次為“模式真理性”——如果一個數學理論建立在合理的抽象思維之上，即可認為確定了一個量化模式，該理論就其取得的形式客觀性而言則可被認為是關於這一模

式的真理。顯然，相對獨立的“模式真理性概念”的引進，乃是承認數學對象獨立存在性的直接推論或必然發展，而這同時也就清楚地表明了數學思維的某種“自由性”：數學家們在一定程度上可以自由地去創造自己的概念，而無須隨時去顧及它們的真實意義。最後，從認識論的角度說，真理的層次性也就表明了數學的認識活動具有多種不同的標準，特別



(2) 研究的內容和方法表現出了明顯的開放性，特別是由一般科學哲學中吸取了不少重要的研究問題和有益的思想，這就和以往的封閉式的數學基礎研究大相逕庭。

例如，拉卡托斯所倡導的擬經驗的數學觀事實上就是將波普爾 (K. Popper) 的證偽主義科學哲學理論推廣應用到了數學的領域；另外，在庫恩 (T. Kuhn) 的科學哲學研究的影響下，則出現了關於數學的社會-文化研究。

就後者而言，我們應當特別提及基切爾的“數學活動論”([14])。這一理論的基本觀點就是認為數學不應簡單地被等同於數學知識的匯集、而應被看成人類的一種創造性活動。基切爾並對“數學活動”的具體內容進行了分析，即認為數學應被看成是由“語言”、“方法”、“問題”、“命題”等多種成分所組成的一個複合體。顯然，這種關於數學的動態研究是與先前的研究傳統、也即單純著眼於數學知識的邏輯結構的靜態分析大相逕庭的。另外，新的研究的又一重要特點則是突出強調了數學研究的社會性。這就是說，在現代社會中，

是，除實踐的標準以外，數學研究還具有相對獨立的數學標準，即如新的研究是否有利於認識的深化以及方法論上的進步等。顯然，後一分析與上述關於數學“擬經驗性”的斷言是完全一致的；或者說，在一定的限度內，我們可以單純憑借數學思維與數學世界的相互作用使認識得到發展和深化：

每個數學家都必然地是作為相應的社會共同體（可稱為“數學共同體”）中的一員從事研究活動的，從而就自覺地或不自覺地處在一定的數學傳統之中；特殊地，一種數學模式的最終建立也就取決於數學共同體的“判決”：只有為數學共同體一致接受的數學概念、方法、問題等才能成為真正的模式。顯然，按照這一分析，在論及數學（活動）的“客觀內容”時，我們就應在“語言”、“方法”等成分上都加上“數學共同體所一致接受的”這樣一個限制詞；另外，我們也就應當把作為數學傳統具體體現的各種“觀念”，即如數學觀和應當怎樣去從事數學研究的共同認識等，看成數學（活動）的一個重要組成成份。

另外，所謂數學的文化研究還包含了多種不同的意義。例如克萊因的《西方文化中的數學》([20]) 就是從一個角度表明了數學作為一種“子文化”與整個人類文化的關係。另外，懷爾德 (R. Wilder) 則集中地研究了數學發展的規律和動力 ([28]、[29])——在懷爾德看來，這就清楚地表明了數學的相對獨立性，而這事實上也就是數學能被看成

人類文化的一個子系統的必要條件。最後，本文作者之一也在這一方向上進行了一些研究，特別是從整體上對數學的文化功能，也即數學與“真”、“善”、“美”的關係進行了分析([30]、[31]、[32])。

最後，與實際的數學活動（包括數學研究和數學教育）的密切聯繫也可看成爲現代數學哲學研究開放性的一個重要表現。特別是，作爲對於思想方法的研究，數學方法論的研究在現代得到了新的發展。就後一方面的工作而言，我們當然應當首先提及著名數學家波利亞（G. Pólya）對於數學啓發法的“復興”。因爲，正是波利亞在這方面的工作（[33]、[34]、[35]）爲現代的數學方法論研究奠定了必要的基礎，特別是確定了這種研究的性質——這主要是一種啓發性的研究。（可參見 [36]）另外，應當提及的是，數學方法論在中國現已得到了普遍的重視。例如，我們在這一方面所獲得的一些研究成果（[36]、[37]、[38]、[39]）已開始在實際的數學活動中產生著積極的影響。特別是，數學方法論的研究更被有些中國數學家和大學教師說成是促成中國數學教育現代發展三大要素之一。事實上，由美國數學教育的具體考察可以看出，數學觀的演變正是促成數學教育現代發展的一個重要原因（可參見 [40]或 [41]）。顯然，這就更爲清楚地表明了數學哲學研究的積極意義。

綜上可見，無論就研究的問題、或是就基本的立場和觀念而言，現代的數學哲學研究與先前的基礎研究相比都已發生了重要的變化，這種變化已經、並將繼續對實際的數學活動產生重要和深遠的影響。

參考文獻

1. P. Benacerraf & H. Putnam, ed., *Philosophy of Mathematics*, Prentice-Hall Inc., 1964.
2. 夏基松、鄭毓信：《西方數學哲學》，人民出版社，1986年。
3. G. Frege, *The Foundations of Arithmetic*, trans. by J. Austin, Oxford: Blackwell, 1950.
4. L. Wittgenstein, *Remarks on the Foundations of Mathematics*, Oxford: Blackwell, 1956.
5. R. Wilder, *Introduction to the Foundations of Mathematics*, Wiley, 1952.
6. A. Fraenkel & Y. Bar-Hillel, *Foundations of Set Theory*, North-Holland, 1958.
7. I. Lakatos, *Infinite Regress and Foundations of Mathematics*, 載 *Mathematics, Science and Epistemology*, Cambridge Univer. Press, 1978.
8. L. Kalmar, *Foundations of Mathematics-whither now?* 載 *Problems in the Philosophy of Mathematics*, ed. by I. Lakatos, North-Holland, 1967.
9. H. Putnam, *Mathematics without Foundations*, 載 *Mathematics, Matter and Method*, Cambridge Univer. Press, 1979.
10. E. Sleinis, “數學需要基礎嗎？”，載《自然科學哲學問題叢刊》，1984年，第一期。
11. M. Steiner, *Mathematical Knowledge*, Cornell Univer. Press, 1975.
12. H. Lehman, *Introduction to the Philosophy of Mathematics*, Oxford: Blackwell, 1979.
13. P. Kitcher, *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford Univer. Press, 1984.

14. 克萊因 (M. Kline):“數學的基礎”, 載《自然雜誌》, 1979年, 第四、五期。
15. A. Robinson, Formalism 64, 載 Logic, Methodology and Philosophy of Mathematics, ed. by Y. Bar-Hillel, North-Holland, 1964.
16. 赫斯:“復興數學哲學的一些建議”, 載《數學譯林》, 1981年第一、二期。
17. I. Lakatos, A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics, 載 Mathematics, Science and Epistemology, Cambridge Univer. Press, 1978.
18. T. Tymoczko, New Directions in the Philosophy of Mathematics, Birk- hauser, 1985.
19. M. Kline, Mathematics in Western Culture, George Allen & Unwin Ltd., 1954.
20. I. Lakatos, Proof and Refutations, ed. by J. Worrall & E. Zahar, Cambridge Univer. Press, 1976.
21. H. Putnam, What is Mathematical Truth, 載 Mathematics, Matter and Method, Cambridge Univer. Press, 1979.
22. L. Steen, The Science of Patterns, 載 Science 240, 1988.
23. 徐利治、鄭毓信:《數學模式論》, 廣西教育出版社, 1993年。
24. 徐利治、鄭毓信:“數學模式觀的哲學基礎”, 載《哲學研究》, 1990年, 第二期。
25. 鄭毓信:《數學哲學新論》, 江蘇教育出版社, 1990年。
26. 鄭毓信 (Y. Zheng), Philosophy of Mathematics in China, 載 Philosophia Mathematica, Vol. 6 (1991), No. 2.
27. R. Wilder, Evolution of Mathematical Concepts, John Wiley & Sons Inc., 1968.
28. R. Wilder, Mathematics as a Cultural System, Pergamon Press, 1980.
29. 鄭毓信:“數學的文化觀念”, 載《自然辯證法研究》, 1991年, 第九期。
30. 鄭毓信:“數學—不可思議的有效性”, 載《南京大學學報》, 1992年, 第四期。
31. 鄭毓信:“數學與理性—論數學的文化價值”, 載《南京大學學報》, 1994年, 第一期。
32. 波利亞:《怎樣解題》, 科學出版社, 1982年。
33. 波利亞:《數學的發現》, 內蒙古人民出版社, 1980年。
34. 波利亞:《數學與猜想》, 科學出版社, 1984年。
35. 徐利治、朱梧賈、鄭毓信:《數學方法論教程》, 江蘇教育出版社, 1992年。
36. 徐利治:《數學方法論選講》, 華中工學院出版社, 1983年。
37. 徐利治、鄭毓信:《關係映射反演方法》, 江蘇教育出版社, 1988年。
38. 徐利治、鄭毓信:《數學抽象方法與抽象度分析法》, 江蘇教育出版社, 1990年。
39. 鄭毓信:“數學哲學、數學教育與數學教育哲學”, 載《哲學與文化》(台灣), 1992年, 第十期。
40. 鄭毓信:“時代的挑戰—美國數學教育研究之一”, 載《數學教育學報》, 1992年, 第一期。
41. 鄭毓信:“加強學習、深化研究, 加速發展我國的數學教育事業—美國數學教育研究之二”, 載《數學教育學報》, 1993年, 第一期。
42. W. Aspray & P. Kitcher, ed. History and Philosophy of Modern Mathematics, Univer. of Minnesota Press, 1988.
43. J. Echeverria & A. Ibarra & T. Mormann, ed. The Space of Mathematics: Philosophical, Epistemological and Historical Exploration, Walter de Gruyter, 1992.
44. M. Tiles, The Philosophy of Set Theory, Basil Blackwell, 1989.
45. C. Parsons, ed. Mathematics in Philosophy, Cornell Univer. Press, 1983.

46. P. Maddy, *Realism in Mathematics*, Clarendon Press, 1990.
47. Wang Hao, *From Mathematics to Philosophy*, Routledge & Kegan Paul Ltd., 1974.
48. Wang Hao, *Reflections on Kurt Gödel*, MIT Press, 1987.
49. D. Gillies, ed. *Revolutions in Mathematics*, Clarendon Press, 1992.
50. S. Mac Lane, *Mathematics, Form and Function*, Springer-Verlag, 1986.
51. S. Mac Lane, “數學模型—對數學哲學的一個概述”, 載《自然雜誌》, 1986年, 第一期。
52. M. Resnik, *Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference*, 載 *Nous*(15), 1981.
53. M. Resnik, *Mathematics as a Science of Patterns: Epistemology*, 載 *Nous*(16), 1982.
54. A. Whitehead, “數學和善”, 載《數學與文化》, 北京大學出版社, 1990年。
55. 波雷爾 (A. Borel), “數學—藝術與科學”, 載《數學譯林》, 1985年, 第三期。
56. 哈爾莫斯 (P. Holmos), “應用數學是壞數學”, 載《數學譯林》, 1985年, 第四期。
57. 波塞爾 (F. Bonsall), “切合實際的數學觀”, 載《數學譯林》, 1985年, 第四期。
58. 鄧東皋等編:《數學與文化》, 北京大學出版社, 1990年。
59. 林夏水編:《數學哲學譯文集》, 知識出版社, 1986年。
60. 中國社會科學院哲學研究所邏輯研究室編:《數理哲學譯文集》, 商務印書館, 1988年。
61. 徐利治、王前:《數學與思維》, 湖南教育出版社, 1990年。
62. 張景中:《數學與哲學》, 湖南教育出版社, 1990年。
63. 齊民友:《數學與文化》, 湖南教育出版社, 1990年。
64. 胡作玄:《數學與社會》, 湖南教育出版社, 1990年。
65. 黃耀樞:《數學基礎引論》, 北京大學出版社, 1987年。
66. 王前:《數學哲學引論》, 遼寧教育出版社, 1991年。
67. 戴維斯、赫斯:《數學經驗》, 江蘇教育出版社, 1991年。
68. P. Davis & R. Hersh, *Descartes' Dream*, Harcourt Brace Jovanovich Inc., 1986.
69. 鄭毓信:《數學方法論》, 廣西教育出版社, 1991年。

—本文作者任教於加拿大曼尼托巴大學和南京大學哲學系—